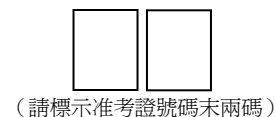


臺北市立建國高級中學 99 學年度數理資優班入班鑑定初選
數學能力測驗 試題卷

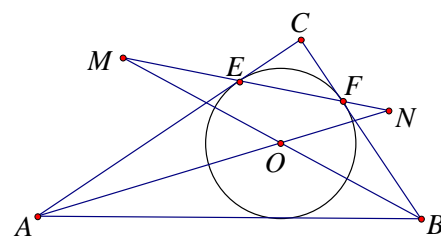
- ※ 注意事項：1. 測驗時間為 80 分鐘
2. 請核對答案卷號及准考證號二者是否相同
3. 請於試題卷首頁右上方空格處標示准考證號末兩碼
4. 可利用試題卷空白處計算
5. 試題卷務必連同答案卷（皆不必書寫姓名）一併繳回



一、選擇題與填充題：(每題 8 分，答錯不倒扣。其中第 5 題是多重選擇題，至少有 1 個選項是正確的；其餘是填充題，請依題號作答在答案卷上。注意：第 7 題的兩小格，請填入(7-1)與(7-2))

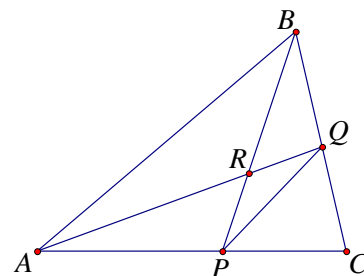
1. 已知一圓的圓周上有 2010 個等分點（相鄰兩點所截劣弧長均相等），如果可以從這 2010 個點中取出 k 個相異點而形成正 k 邊形（ $k \geq 3$ ），則滿足此條件的整數 k 有 (1) 種可能。
2. 已知 a, b, c 三個質數，滿足 $a+b+c+abc=149$ ，則 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=$ (2) 。
3. 有一矩形的長與寬分別為整數 a 與整數 b ，其中 $a > b$ ，已知此矩形的周長與其兩對角線長之和，恰等於此矩形面積的整數倍，則數對 (a, b) 共有 (3) 組解。
4. 將一些邊長為 1 的「單位正方體」拼成一個邊長為 n 的大正方體（ n 為正整數），將大正方體的其中幾個面染成紅色，然後將大正方體拆為原來的單位正方體，發現其中有 163 塊單位正方體被染成了紅色，求 $n =$ (4) 。
5. 三位數字 $x = a \times 100 + b \times 10 + c$ （其中 a, b, c 是 0~9 的整數， $a \neq 0$ ），已知 x 是一質數，則下列哪些數可能是 $b^2 - 4ac$ ？ (5) （多重選擇題）
(A) 81 (B) 53 (C) 47 (D) 36 (E) 12
6. 已知 a 是正整數，且 $a^2 + 132a$ 是一個正整數的平方，求 a 的最大值為 (6) 。

7. 如右參考圖 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，圓 O 是 $\triangle ABC$ 的內切圓，點 E 、 F 分別是 \overline{AC} 與 \overline{BC} 邊上的切點，若射線 \overrightarrow{AO} 與 \overrightarrow{BO} 分別交直線 \overleftrightarrow{EF} 於 N 、 M 兩點，則



- ① 兩三角形面積比 $\frac{\Delta OMN}{\Delta OAB} = \underline{\hspace{2cm}} (7-1)$ ，
- ② 兩三角形面積比 $\frac{\Delta OMN}{\Delta ABC} = \underline{\hspace{2cm}} (7-2)$ 。(本題兩小格，每格 4 分)

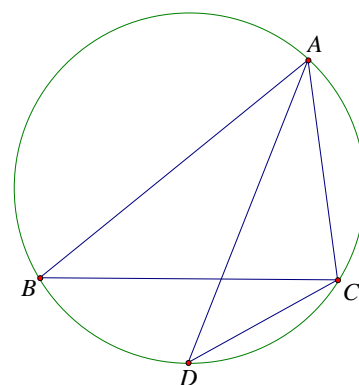
8. 如右參考圖 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 的平分線 \overline{BP} 交 \overline{AC} 於 P ， $\angle BAC$ 的平分線 \overline{AQ} 交 \overline{BC} 於 Q ， \overline{BP} 與 \overline{AQ} 交於 R 點，若 $\angle BPQ = \frac{1}{2}\angle C$ 且 $PQ = 3$ ，求 \overline{RQ} 的長為 (8) 。



二、計算證明題：(1~3 題，每題 12 分，題目在答案卷上，直接作答於答案卷)

1. 某次有 8 支球隊參加足球比賽，任兩隊均分別在主場和客場各比一場，勝者一場得 3 分，平手則兩隊各得 1 分，負者得 0 分。
- (1) 試問這次比賽共進行了多少場賽事？
 - (2) 這次比賽的各種可能的勝負結果中，8 隊積分總和最大是多少？最小是多少？
 - (3) 若比賽結束後按積分的高低排出名次，在積分榜上名次相鄰的兩支球隊，他們的積分差距最多可達幾分？
 - (4) 若改成有 n 支球隊參加足球比賽，則類似上題(3)的積分榜上，名次相鄰的兩支球隊的積分差距最多可達幾分？

2. 已知 $\triangle ABC$ 中， \overline{AB} 與 \overline{AC} 的長度和等於 \overline{BC} 長度的 2 倍，若 $\angle BAC$ 的內角平分線交 $\triangle ABC$ 外接圓於 D 點，
- (1) 求 \overline{AD} 長度： \overline{DC} 長度的值。
 - (2) 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，過 O 點作 \overline{AD} 的垂線交 \overline{AD} 於 I 點，
證明： I 為 $\triangle ABC$ 的內心。



3. 將 1~13 的正整數隨意排成一直線，取其中任 4 個相鄰數字相加可得到 10 個數，設此 10 個數中最大者為 n ，這個數字 n 會隨著排列順序而改變。

(1) ① $\langle 12, 10, 3, 5, 4, 13, 9, 7, 8, 6, 2, 1, 11 \rangle$ 的 n 值=?

② $\langle 13, 3, 9, 8, 11, 10, 2, 5, 4, 6, 7, 1, 12 \rangle$ 的 n 值=?

③ 觀察所有的排列順序，求 n 的最大值=?

(2) 寫出一種排列順序，使其 n 值是所有排列順序中最小。(不需證明，但請寫出排列順序與此最小值)

(3) 證明：小於上題最小 n 值的數，不可能成為任何一種排列順序的 n 值。